Πανελλαδικές Εξετάσεις
Μαθηματικά Κατεύθυνσης
11 Ιουνίου 2018

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.99

Α2.
α. Λ
β. Αντιπαράδειγμα , σχολικό βιβλίο σελ.35 , σχ. 34

$g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$, είναι 1-1 αλλά όχι γνησίως μονότονη.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.216

Α4. Α) Λ   Β) Λ   Γ) Σ   Δ) Σ   Ε) Σ

Θέμα Β

Β1.

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x-\frac{4}{x^2},\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=(x)'-\left(\frac{4}{x^2}\right)'=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3}.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3}=0 \Leftrightarrow x+2=0 \quad \text{ή} \quad x^2-2x+4=0 \text{ , αδύνατη}$$

$$\Leftrightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	**-2** $+\infty$	**0**
$x+2$	-	+	+
x^2-2x+4	+	+	+
x^3	-	-	+
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και στο $(0,+\infty)$,
ενώ είναι φθίνουσα στο $[-2,0)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=-2$ το

$$f(-2)=-2-\frac{4}{(-2)^2}=-2-\frac{4}{4}=-2-1=-3 .$$

Β2.

$$f''(x)=\left(\frac{x^3+8}{x^3}\right)'=\frac{\left(x^3+8\right)'\cdot x^3-\left(x^3+8\right)\cdot\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=\frac{3x^2\cdot x^3-3x^2\cdot\left(x^3+8\right)}{x^6}=\frac{3x^5-3x^5-24x^2}{x^6}=\frac{-24x^2}{x^6}$$

$$f''(x)=-\frac{24}{x^4}$$

Είναι $f''(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, οπότε f κοίλη και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Β3.

Κατακόρυφη στο $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=0-(+\infty)=-\infty$. Άρα η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

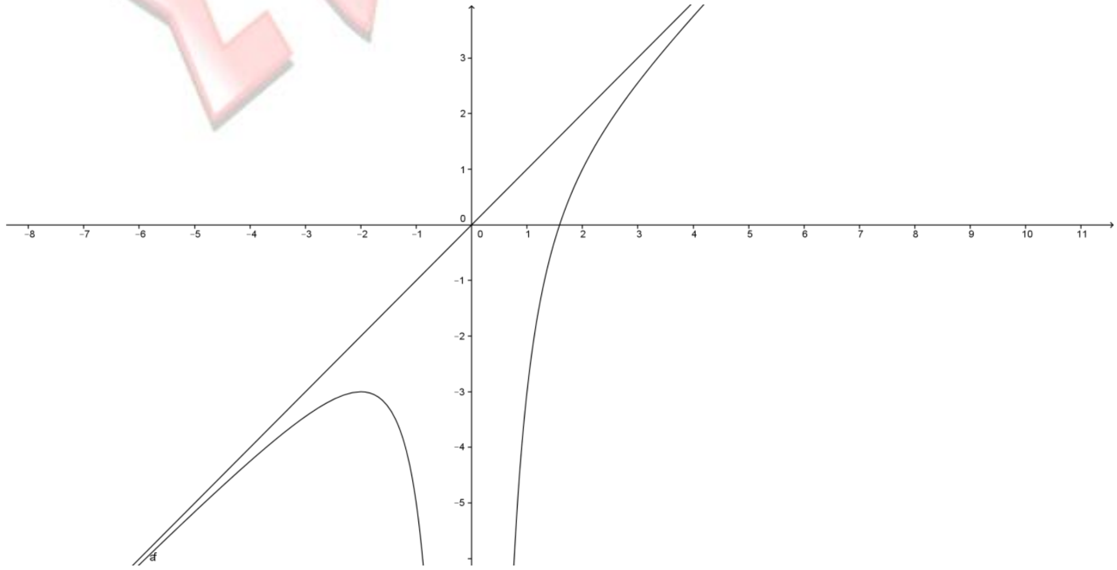
Οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1=\lambda\in\mathbb{R}$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$

άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Ομοίως $y=x$, πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Β4.



Θέμα Γ

Γ1.

Αρχικό μήκος σύρματος $l = 8m$.

Εφόσον το χωρίζουμε σε δύο τμήματα και το ένα από αυτά έχει μήκος x , το δεύτερο θα έχει μήκος $8 - x$, όπου το $x \in (0,8)$.

Η περίμετρος του τετραγώνου είναι ίση με $\Pi_T = x$.

Άρα κάθε πλευρά του τετραγώνου θα είναι ίση με $\frac{x}{4}$.

Συνεπώς το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι ίσο με $E_T = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$ τ.μ.

Η περίμετρος του κύκλου είναι ίση με $\Pi_K = 8 - x$.

Επιπλέον η περίμετρος του κύκλου δίνεται από τη σχέση $\Pi_K = 2\pi\rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου.

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω έχουμε: $8 - x = 2\pi\rho \Rightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}$.

Για το εμβαδόν του κύκλου θα έχουμε

$$E_K = \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot \left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi(8-x)^2}{4\pi^2} = \frac{(8-x)^2}{4\pi} \text{ τ.μ.}$$

Συνολικά για το άθροισμα των εμβαδών θα ισχύει:

$$E(x) = E_T + E_K = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{x^2\pi + 4(8-x)^2}{16\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(64 - 16x + x^2)}{16\pi} =$$

$$= \frac{\pi x^2 + 256 - 64x + 4x^2}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8)$$ που είναι και το ζητούμενο.

Γ2.

Πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την $\mathrm{E}(x)$. Ξεκινάμε βρίσκοντας την παράγωγό της.

$$E'(x)=\left(\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\right)'=\frac{1}{16\pi}\left[(\pi+4)2x-64\right]=\frac{(\pi+4)2x-64}{16\pi}\ .$$

$$E'(x)=0\Leftrightarrow(\pi+4)2x-64=0\Leftrightarrow(\pi+4)2x=64\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}\ .$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων για την $E'(x)$:

x	**0** **8**	$\frac{32}{\pi+4}$	
$\mathrm{E}'(x)$	-	0	+
$\mathrm{E}(x)$	↘		↗

Από τον πίνακα φαίνεται ότι πράγματι η $E(x)$ ελαχιστοποιείται για $x=\frac{32}{\pi+4}$. Για αυτή την τιμή του x , από Γ_1 η πλευρά του τετραγώνου και η διάμετρος του κύκλου γίνονται αντίστοιχα ίσες. Πράγματι:

Πλευρά τετραγώνου: $\frac{x}{4}=\frac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\frac{32}{4(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}$

Διάμετρος κύκλου:

$$\delta=2\rho=2\left(\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{2\pi}\right)=2\left(\frac{\frac{8\pi+32-32}{\pi+4}}{2\pi}\right)=2\left(\frac{8\pi}{2\pi(\pi+4)}\right)=\frac{8}{\pi+4}\ .$$

Γ3.

Από Γ_2 η $\mathrm{E}(x)$ είναι φθίνουσα στο $\Delta_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$. Οπότε θα έχει σύνολο τιμών σε αυτό το διάστημα $R_{\Delta_1}=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to0^+}E(x)\right)$.

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{(\pi+4)\left(\frac{32}{\pi+4}\right)^2-64\frac{32}{\pi+4}+256}{16\pi}=\frac{\frac{32^2}{\pi+4}-\frac{2048}{\pi+4}+256}{16\pi}=$$

$$=\frac{1024-2048+(\pi+4)256}{16\pi(\pi+4)}=\frac{-1024+256\pi+1024}{16\pi(\pi+4)}=\frac{256\pi}{16\pi(\pi+4)}=\frac{16}{\pi+4}$$

$$\lim_{x\to0^+}E(x)=\frac{(\pi+4)\cdot0^2-64\cdot0+256}{16\pi}=\frac{256}{16\pi}=\frac{16}{\pi}$$

Οπότε $R_{\Delta_1}=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$.

$$\frac{16}{\pi+4}<5 \Leftrightarrow 16<5\pi+20 \Leftrightarrow 5\pi>-4 \text{ και } 5<\frac{16}{\pi} \Leftrightarrow 5\pi<16 \Leftrightarrow \pi<\frac{16}{5}$$

Τελικά έχουμε $\frac{16}{\pi+4}<5<\frac{16}{\pi}$.

Το $5\in\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$ επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε

$E(x_0)=5$. Λόγω της μονοτονίας στο διάστημα, αυτό το x_0 θα είναι και μοναδικό.

Η $\mathrm{E}(x)$ είναι αύξουσα στο $\Delta_2=\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$. Οπότε θα έχει σύνολο τιμών σε αυτό

το διάστημα το $R_{\Delta_2}=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to8^-}E(x)\right)$.

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{16}{\pi+4}$$

$$\lim_{x\to8^-}\mathrm{E}(x)=\frac{(\pi+4)\cdot8^2-64\cdot8+256}{16\pi}=\frac{64\pi+256-512+256}{16\pi}=\frac{64\pi}{16\pi}=4 \ .$$

Οπότε $R_{\Delta_2}=\left[\frac{32}{\pi+4},4\right)$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $5\notin\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$ οπότε δεν

υπάρχει $\xi\in\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$ ώστε $E(\xi)=5$.

Συνολικά δηλαδή αποδείξαμε ότι υπάρχει ένα μοναδικό σημείο στο (0,8) ώστε το άθροισμα των εμβαδών να είναι ίσο με 5.

Θέμα Δ

Δ₁. Δίνεται $f(x)=2e^{x-a}-x^2,\ x\in\mathbb{R}\ ,\ a>1$

$$f'(x)=2e^{x-a}(x-a)'-2x=2e^{x-a}-2x=2\left(e^{x-a}-x\right)$$

$$f''(x)=2e^{x-a}(x-a)'-2=2e^{x-a}-2=2\left(e^{x-a}-1\right)$$

$$f''(x)=0\Rightarrow\ 2\left(e^{x-a}-1\right)=0\ \Leftrightarrow\ e^{x-a}=1\ \Leftrightarrow\ x-a=0\ \Leftrightarrow\ x=a$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f''	-	0	+
f	⌒		⌣
f'	↘		↗

Είναι $f(\alpha)=2-\alpha^2$. Η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $A\left(\alpha,2-\alpha^2\right)$

Δ₂.

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_1=(-\infty,\alpha]$, οπότε

$$f'(\Delta_1)=[f'(\alpha),\lim_{x\to-\infty}f'(x))=[2-2a,+\infty)$$

- $f'(\alpha)=2e^{a-a}-2a=2-2a$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x-a}-2x\right)=2\cdot 0-2(-\infty)=+\infty$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_2=(\alpha,+\infty)$, οπότε

$$f'(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to\alpha^+}f'(x),\lim_{x\to+\infty}f'(x)\right)=(2-2\alpha,+\infty)$$

- $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f'(x)=2e^{a-a}-2a=2-2a$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{x-a}-2x\right)=+\infty-(+\infty)$, απροσδιόριστη μορφή

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2e^{x-a}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(2\frac{e^{x-a}}{x}-2\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot 2\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x-a}}{x}-1\right)\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}(+\infty)\cdot 2\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x-a}}{1}-1\right)$$

$$=(+\infty)\cdot 2\cdot(+\infty)=+\infty$$

Άρα για κάθε $\alpha>1\Rightarrow-2\alpha<-2\ \Rightarrow 2\alpha-2>0$

Άρα $0 \in f'(\Delta_1)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$

Άρα $0 \in f'(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$

Για κάθε $x < x_1 \xRightarrow{f'\searrow} f'(x) > f'(x_1) \Rightarrow f'(x) > 0$

Για κάθε $x_1 < x < \alpha \xRightarrow{f'\searrow} f'(x_1) > f'(x) \Rightarrow f'(x) < 0$

Για κάθε $\alpha < x < x_2 \xRightarrow{f'\nearrow} f'(x) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) < 0$

Για κάθε $x > x_2 \xRightarrow{f'\nearrow} f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
f'	+	0	-	0	+	
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Δ3.

$f(x) = f(1)$, $x \in (\alpha, x_2)$ (1)

Α τρόπος

Έστω ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζα στο (α,x_2), τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = f(1)$.

$f'(1) = 2(e^{1-\alpha} - 1) < 0$, για κάθε $\alpha > 1$, άρα $x_1 < 1$

Η f είναι συνεχής στο $[1,x_o]$.
Η f παραγωγίσιμη στο $(1,x_o)$
$f(x_o) = f(1)$

Οπότε από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (1,x_o)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, άτοπο αφού η f μηδενίζεται μόνο για $x = x_1$ και $x = x_2$. Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α,x_o).

Β τρόπος

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, x_2) , $f(\alpha) = 2 - \alpha^2$ και $f(1) = 2e^{1-\alpha} - 1$.

Είναι $2 - \alpha^2 < 2e^{1-\alpha} - 1 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0$.

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = 2e^{1-x} + x^2 - 3$ με $x > 1$.

Η $g(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

- $g'(x) = 2x - 2e^{1-x}$
- $g''(x) = 2 + 2e^{1-x}$, με $g''(x) > 0$ για $x \in (1, +\infty)$

Επομένως η $g'(x)$ γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Αν $x>1$ τότε $g'(x)>g'(1) \Leftrightarrow g'(x)>0$, άρα η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

$x>1 \Rightarrow g(x)>g(1) \Rightarrow g(x)>0$

Άρα $g(\alpha)>0$, οπότε $f(\alpha)<f(1)$ και έτσι η $f(x)=f(1)$ αδύνατη στο (α,x_2) .

Δ4.

Είναι $f(x)=2e^{x-2}-x^2$.

Η εφαπτομένη είναι $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, με $f(2)=2e^{2-2}-2^2=2-4=-2$ και

$f'(2)=2\left(e^{2-2}-2\right)=-2$, άρα

$y+2=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+2 \ \ (\varepsilon)$, η εφαπτομένη στο 2.

Η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$ οπότε για κάθε $x\in[2,+\infty)$ ισχύει ότι

$f(x)\geq -2x+2 \quad (2)$

όπου η ισότητα ισχύει για $x=2$

$$(2) \overset{\sqrt{x-2}\geq 0}{\Rightarrow} f(x)\sqrt{x-2}\geq(-2x+2)\sqrt{x-2} \overset{\substack{\text{Η ισότητα}\\ \text{ισχύει μόνο}\\ \text{για } x=2}}{\Rightarrow} \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}dx$$

Είναι $\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}dx$. θέτουμε $u=\sqrt{x-2} \Rightarrow u^2=x-2 \Rightarrow 2udu=dx$

Για $\begin{matrix} x=2 \to u=0 \\ x=3 \to u=1 \end{matrix}$. Άρα είναι

$$\int_0^1\left[-2\left(u^2+2\right)+2\right]\cdot u\cdot 2udu=\int_0^1\left(-4u^4-4u^2\right)du=\left[-\frac{4}{5}u^5-\frac{4}{3}u^3\right]_0^1=-\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=\frac{-32}{15}.$$

Οπότε $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>-\frac{32}{15}$.

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:

Καψαλιάρης Στυλιανός

Νίκου Δημήτρης

Παλτσόκας Παναγιώτης

Παπαθανασίου Νίκος

Σιταρίδης Σπύρος

Τογανίδης Νίκος

Χαραλαμπίδης Δημήτρης