

ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
Ύλη: Πραγματικοί Αριθμοί - Εξισώσεις
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03 Ιανουαρίου 2018

ΘΕΜΑ Α

- Α₁**. Τι ονομάζεται ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α και πώς συμβολίζεται;
(Μονάδες 5)
- Α₂**. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α;
(Μονάδες 5)
- Α₃**. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε να δείξετε ότι ισχύει: $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$.
(Μονάδες 5)
- Α₄**. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- (i) Για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
- (ii) Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$.
- (iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sqrt[4]{x^6} = \sqrt{x^3}$.
- (iv) Αν ν περιττός και $\alpha < 0$, τότε η εξίσωση $x^n = \alpha$ είναι αδύνατη.
- (v) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $\lambda \cdot x = \lambda$ έχει τουλάχιστον μία λύση.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

- Β₁**. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:
- α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$.
- β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:
 $1, x, x^2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 15)
- Β₂**. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{y+1}{y-3} - \frac{y-1}{y+3} = \frac{8y}{y^2-9}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

- Γ₁**. Να δείξετε ότι: $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1} = 2$.
(Μονάδες 8)
- Γ₂**. Να δείξετε ότι: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{6} = 6$.
(Μονάδες 8)
- Γ₃**. Αν για τους αριθμούς α, β ισχύουν οι σχέσεις:
 $(\alpha - 3)^2 \leq 1$ και $(\beta + 1)^2 \leq 4$, τότε να δείξετε ότι: $1 \leq 2\alpha + \beta \leq 9$.
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1

Α₁. Θεωρούμε την παράσταση $A = \sqrt{1 + \frac{2x}{x^2 + 1}} + \sqrt{1 - \frac{2x}{x^2 + 1}}$.

α) Να δείξετε ότι: $A = \frac{|x+1| + |x-1|}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $d(x, 0) < 1$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $A = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ii. $A > \sqrt{2}$

(Μονάδες 8)

Α₂. Δίνεται η εξίσωση: $\frac{\lambda}{x+1} - \frac{\lambda-1}{x} = \frac{1}{x-\lambda}$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το σύνολο A των τιμών του x για το οποίο ορίζεται η παραπάνω εξίσωση.
(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in A$, η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα: $2\lambda x = \lambda^2 - \lambda$, (2).
(Μονάδες 3)

γ) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ να επιλυθεί η εξίσωση (2).
(Μονάδες 6)

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι καθηγητές :

Νίκου Δημήτρης

Παλτσόκας Παναγιώτης

Παπαθανασίου Νίκος

Χωνιανάκης Αντώνης