

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

29-11-2015

ΚΕΦΑΛΑΙΟ:ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

- Έστω μια συνάρτηση f και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της.
 - Πότε η f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε λέγεται γνησίως φθίνουσα στο Δ ;
 - Πότε η f λέγεται γνησίως μονότονη;

(Μονάδες 5)
- Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής στο $x_0 \in A$;

(Μονάδες 5)

- Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A , να αποδείξετε ότι:
 $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.

(Μονάδες 5)

- Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ , αν είναι σωστές και με Λ , αν είναι λάθος.
 - Αν για συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} ισχύει $f(x) \leq \alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f έχει σίγουρα ολικό μέγιστο το α .
 - Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και για $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f'(x_0) = 0$ τότε f έχει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .
 - Αν $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) , $f'(x) < 0$ στο (β, x_0) τότε η f παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο
 - Αν $f(w) = w \ln x$ τότε $f'(w) = \frac{w}{x}$
 - Αν f, g παραγωγίσιμες τότε $[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

- Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2\sigma\upsilon\nu x - x\sigma\upsilon\nu x - 2}{\eta\mu^2 x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - 4e^x - x + 4}{e^{2x} - 1}$

(Μονάδες 15)

2. Έστω $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x + 2}$, με $a \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο M , με τεταγμένη -4 . Να βρεθούν:
- Το πεδίο ορισμού της f .
 - Ο αριθμός a .
 - Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = -9$.
 - Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα xx' .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $K(-1, -9)$ και $\Lambda(-5, 7)$. Να βρείτε:
- Τα α, β
 - Το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση είναι κάτω από τον άξονα xx'
 - Το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-x) - f(x)}{\sqrt{x+3} - 2}$
 - Το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+1) - f(4)}{f(x) - f(3)}$

(Μονάδες 10)

2. Έστω η $f(x) = x^3 - 3x + 2$

- Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της f .
- Αν ισχύει $4f''(1) - \alpha f'(0) = 27$. Να βρεθεί ο α και το όριο $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{f'(x)(f''(x) - f''(\alpha))}$

(Μονάδες 10)

3. Βρείτε τις παρακάτω παραγώγους:

- $f(x) = e^{\sin x^3}$
- $f(x) = \ln(e^{2x} + \sin^2 x)$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

1. Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x - 1}, & x \neq 1 \\ -3, & x = 1 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι:

- η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρείτε την $f'(1)$

(Μονάδες 10)

2. Δίνεται $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- Την μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- Τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A .

(Μονάδες 10)

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2 + 4\lambda x - 8\lambda}$

- Να βρείτε για ποιο λ , η μέγιστη τιμή της f γίνεται ελάχιστη.
- Για την παραπάνω τιμή της λ , να βρείτε την εξίσωση της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(3, f(3))$.

(Μονάδες 5)