Άλγεβρα Α' Λυκείου

Εξεταζόμενη Ύλη: Κεφάλαιο 3 – Κεφάλαιο 4

Ημερομηνία: 11 Φεβρουαριου 2018

Απαντήσεις

Θέμα Α

A1

- **i.** Σχολικό βιβλίο σελ. 90
- **ii.** Σχολικό βιβλίο σελ. 90

A2

- **i.** Λάθος
- **ii.** Λάθος
- **iii.** Σωστό
- **iv.** Σωστό
- **v.** Λάθος

Θέμα Β

Β1

i. $\frac{2x}{x-2}-\frac{3}{x}=\frac{x^2+4}{x^2-2x} \Leftrightarrow \frac{2x}{x-2}-\frac{3}{x}=\frac{x^2+4}{x(x-2)}$

Πρέπει: $\left(x-2\neq 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x\neq 0\right) \Leftrightarrow \left(x\neq 2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x\neq 0\right)$

$\frac{2x}{x-2}-\frac{3}{x}=\frac{x^2+4}{x(x-2)} \Leftrightarrow x(x-2)\frac{2x}{x-2}-x(x-2)\frac{3}{x}=x(x-2)\frac{x^2+4}{x(x-2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-3(x-2)=x^2+4 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1>0$

$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow (x_1=2, x_2=1)$

Η ρίζα $x_1=2$ απορρίπτεται λόγω περιορισμών. Οποτε δεκτή είναι μόνο η ρίζα $x_2=1$

ii. $2x^4-4=7x^2 \Leftrightarrow 2x^4-7x^2-4=0$ (διτετράγωνη)

Θέτω $x^2=\omega, \omega\geq 0$ και η εξίσωση γίνεται:

$2\omega^2-7\omega-4=0$, $\Delta=81>0$

- $\omega_1=\frac{7+9}{4}=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$
- $\omega_1=\frac{7-9}{4}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{2}$, αδύνατη.

iii. $27x^2 - x^5 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(27 - x^3\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \ \ ή \ \ 27 - x^3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \ ή \ \ x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 0 \ \ ή \ \ x = 3$

B2 $\left(\lambda^2 - 1\right)x^2 + \left(\lambda - 1\right)x + 1 = 0$

i. Για να έχει η εξίσωση μία διπλή ρίζα πρέπει:

- $\lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 1$
- $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda - 1\right)^2 - 4\left(\lambda^2 - 1\right)1 = 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

  $\Delta' = \left(-2\right)^2 - 4\left(-3\right)5 = 64 > 0$

  $\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 8}{-6} \Leftrightarrow \lambda_1 = -\dfrac{5}{3}, \lambda_2 = 1$

Η ρίζα $\lambda_2 = 1$ απορρίπτεται λόγω περιορισμών. Οποτε δεκτή είναι μόνο η ρίζα $\lambda_1 = -\dfrac{5}{3}$.

ii. $x_0 = -\dfrac{\lambda - 1}{2\left(\lambda^2 - 1\right)} = -\dfrac{\lambda - 1}{2\left(\lambda - 1\right)\left(\lambda + 1\right)} = -\dfrac{1}{2\left(\lambda + 1\right)} = -\dfrac{1}{2\left(-\dfrac{5}{3} + 1\right)} = \dfrac{3}{4}$

Θέμα Γ

Γ1

i. $2\left(x - 1\right) \leq 3 - x < 3\left(x + 1\right)$

- $2\left(x - 1\right) \leq 3 - x \Leftrightarrow 2x - 2 \leq 3 - x \Leftrightarrow 3x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{5}{3}$
- $3 - x < 3\left(x + 1\right) \Leftrightarrow 3 - x < 3x + 3 \Leftrightarrow -4x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα $0 < x \leq \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow x \in \left(0, \dfrac{5}{3}\right]$

ii. $8 - \left|2x - 6\right| \leq \dfrac{\left|3 - x\right| - 4}{2} \Leftrightarrow 8 - 2\left|x - 3\right| \leq \dfrac{\left|x - 3\right| - 4}{2} \Leftrightarrow 16 - 4\left|x - 3\right| \leq \left|x - 3\right| - 4 \Leftrightarrow$

$-5\left|x - 3\right| \leq -20 \Leftrightarrow \left|x - 3\right| \geq 4 \Leftrightarrow x - 3 \leq -4 \ \ ή \ \ x - 3 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -1 \ \ ή \ \ x \geq 7 \Leftrightarrow$

$x \in \left(-\infty, -1\right] \cup \left[7, +\infty\right)$

iii. $x^2 - x < -2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 < 0$

$\Delta = \left(-1\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$

X	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
x^2-x+2	+

Άρα η ανίσωση ειναι αδύνατη.

Γ2 $A=\dfrac{2x^2+2x-4}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x^2-x-3}{x^2+4x+4}$

- $2x^2+2x-4=2\left(x^2+x-2\right)=2\left(x-1\right)\left(x+2\right)$

$x^2+x-2=0,$

$\Delta=9>0, x_1=1, x_2=-2$

- $x^2-1=\left(x-1\right)\left(x+1\right)$

- $2x^2-x-3=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(x+1\right)=\left(2x-3\right)\left(x+1\right)$

$2x^2-x-3=0$

$\Delta=25>0, x_1=\dfrac{3}{2}, x_2=-1$

- $x^2+4x+4=\left(x+2\right)^2$

Άρα $A=\dfrac{2\left(x-1\right)\left(x+2\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}\cdot\dfrac{\left(2x-3\right)\left(x+1\right)}{\left(x+2\right)^2}$

i. Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει: $x\neq 1$ και $x\neq -1$ και $x\neq -2$

ii. $A=\dfrac{2\left(x-1\right)\left(x+2\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}\cdot\dfrac{\left(2x-3\right)\left(x+1\right)}{\left(x+2\right)^2}\Leftrightarrow A=\dfrac{2\left(2x-3\right)}{x+2}$

Θέμα Δ

Δ1 $x^2-3\lambda x-27=0$ **(1).**

i. $\Delta=\left(-3\lambda\right)^2+4\cdot 1\cdot 27=9\lambda^2+108>0$ ως άθροισμα θετικών αριθμών. Άρα η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες ρίζες.

ii.

α) $x_1+x_2=S=\dfrac{3\lambda}{1}=3\lambda$

β) $x_1\cdot x_2=P=\dfrac{-27}{1}=-27$

γ) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{S}{P}=\frac{3\lambda}{-27}=-\frac{\lambda}{9}$

δ) $(x_1+2)(x_2+2)=x_1x_2+2x_1+2x_2+4=P+2S+4=-27+6\lambda+4=6\lambda-23$

iii.

α) Ισχύει ότι $\left.\begin{aligned} x_1&=x_2^2\\ x_1+x_2&=3\lambda\\ x_1\cdot x_2&=-27\end{aligned}\right\}$

- $x_1\cdot x_2=-27\Leftrightarrow x_2^2\cdot x_2=-27\Leftrightarrow x_2^3=-27\Leftrightarrow x_2=-3$
- $x_1=x_2^2\Leftrightarrow x_1=(-3)^2\Leftrightarrow x_1=9$
- $x_1+x_2=3\lambda\Leftrightarrow 9-3=3\lambda\Leftrightarrow \lambda=2$

β)

- $\rho_1=x_1+2=9+2=11$
- $\rho_2=x_2+2=-3+2=-1$

$S=\rho_1+\rho_2=11-1=10$
$P=\rho_1\cdot\rho_2=11\cdot(-1)=-11$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-10x-11=0$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές
Δημήτρης Νίκου
Παναγιώτης Παλτσόκας
Νίκος Παπαθανασίου
Αντώνης Χωνιανάκης