# ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
## Ύλη: Ανισώσεις – Πρόοδοι - Συναρτήσεις
## ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 11 Απριλίου 2018
## Απαντήσεις

### ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό Βιβλίο σελίδα 123.

*(Μονάδες 5)*

**Α2.** Σχολικό Βιβλίο σελίδα 146.

*(Μονάδες 5)*

**Α3.**

$x^2 - (\Delta + 2)x + S - 1 = 0$, $\Delta > 0$

Από τους τύπους του Vietta έχουμε: $S = -\frac{-(\Delta+2)}{1} \Leftrightarrow S = \Delta + 2$

Οπότε η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$x^2 - (\Delta + 2)x + \Delta + 1 = 0$

$\alpha = 1$, $\beta = -(\Delta + 2)$, $\gamma = \Delta + 1$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = \Delta^2 + 4\Delta + 4 - 4\Delta - 4 \Leftrightarrow \Delta^2 - \Delta = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0(\alpha\pi o\rho.) \text{ ή } \Delta = 1$

Συνεπώς για $\Delta = 1$, η δοσμένη εξίσωση γίνεται: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$

*(Μονάδες 5)*

**Α4.** . i –> Λ, ii–>Λ, iii–>Λ, iv –> Λ, v –> Λ

*(Μονάδες 10)*

### ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $f(x) = \begin{cases} -2x, & \alpha\nu\ x \le -2 \\ 4, & \alpha\nu\ -2 < x < 1 \\ 3 - x, & \alpha\nu\ x \ge 1 \end{cases}$

Α. $D_f = \mathbb{R}$

*(Μονάδες 2)*

Β.

**α.** $f(-2) = 4$ **β.** $f(1) = 2$ **γ.** $f(3) = 0$ **δ.** $f(-\sqrt{2}) = 4$

**ε.** $f(f(0)) = f(4) = -1$ **στ.** $f(f(-3)) = f(6) = -3$

**ζ.** $f(f(6)) = f(-3) = 6$ **η.** $f(-1 - f(f(3))) = f(-1 - f(0)) = f(-5) = 10$

*(Μονάδες 8)*

**Β2.** $f(x) = \frac{x^3 + \lambda x^2 + (\lambda - 7)x - 12}{x + 3}$, $f(1) + f(3) = 2$ (1)

*α)* Θα πρέπει $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$. Οπότε $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(1)+f(3)=2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1^3+\lambda\cdot 1^2+(\lambda-7)\cdot 1-12}{1+3}+\frac{3^3+\lambda\cdot 3^2+(\lambda-7)\cdot 3-12}{3+3}=2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\lambda-18}{4}+\frac{12\lambda-6}{6}=2 \Leftrightarrow \frac{6\lambda-54+24\lambda-12}{12}=2 \Leftrightarrow$$

$$30\lambda-66=24 \Leftrightarrow \lambda=3$$

*(Μονάδες 2 + 5)*

*β)* Για λ = 3 η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x+3}=\frac{x^2(x+3)-4(x+3)}{x+3}=$$

$$\frac{(x+3)(x^2-4)}{x+3}=x^2-4$$

*(Μονάδες 3)*

*γ)*

$$f(x)\le 4x-8 \Leftrightarrow x^2-4\le 4x-8 \Leftrightarrow$$

$$x^2-4x+4\le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2\le 0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$$

*(Μονάδες 5)*

## ***ΘΕΜΑ Γ***

***Γ1.*** $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

*Α.* Για την διακρίνουσα του τριωνύμου έχουμε:

$\Delta=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=(\lambda^2-1)^2\ge 0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

*(Μονάδες 5)*

*Β.* Θα πρέπει:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$$

Οπότε για $\lambda=\pm 1$ το παραπάνω τριώνυμο έχει μια διπλή ρίζα

*(Μονάδες 3)*

*Γ.* Ισχύει ότι: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
αν και μόνο αν:

$$\lambda<0 \text{ και } \Delta\le 0$$

Έχουμε:

$$\Delta\le 0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)^2\le 0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$$

Όμως $\lambda<0$, οπότε δεκτή είναι μόνο η τιμή $\lambda=-1$.

*(Μονάδες 7)*

***Γ2.*** $\alpha_4=-5,\ \alpha_7+\alpha_{11}=20$

*(i)*

$\alpha_4=-5 \Leftrightarrow \alpha_1+(4-1)\omega=-5 \Leftrightarrow \alpha_1+3\omega=-5$ **(1)**

$\alpha_7+\alpha_{11}=20 \Leftrightarrow \alpha_1+(7-1)\omega+\alpha_1+(11-1)\omega=20 \Leftrightarrow$

$2\alpha_1+16\omega=20 \Leftrightarrow -\alpha_1-8\omega=-10$ **(2)**

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

(1) + (2) $\Rightarrow -5\omega = -15 \Rightarrow \omega = 3$

(1)$\Rightarrow \alpha_1 + 9 = -5 \Leftrightarrow \alpha_1 = -14$

*(Μονάδες 5)*

*(ii)* $\alpha_{10} = -14 + (10-1)\cdot(3) \Leftrightarrow \alpha_{10} = 13$

*(Μονάδες 2)*

*(iii)* $S = \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10} = S_{10} - S_4$

- $S_{10} = \frac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_{10}) = 5(-14+13) = -5$
- $S_4 = \frac{4}{2}(\alpha_1 + \alpha_4) = 2(-14-5) = -38$

Οπότε το ζητούμενο άθροισμα είναι: $S = -33$

*(Μονάδες 3)*

## *ΘΕΜΑ Δ*

***Δ1.*** Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (1+\alpha)^2 + 4(1+\alpha^2) = 5\alpha^2 + 2\alpha + 5$$

$\Delta_\alpha = 5 - 100 = -96$, και $5 > 0$.

Άρα $\Delta > 0$, όποτε το τριώνυμο θα έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού α.

Από του τύπους Vietta έχουμε: $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{(1+\alpha^2)} < 0$, για κάθε πραγματικό α.

Αφού το γινόμενο των ριζών είναι αρνητικό, έχουμε ότι οι ρίζες του τριωνύμου θα είναι ετερόσημες.

*(Μονάδες 8)*

***Δ2.***

*(i)* Από τους τύπους Vietta γνωρίζουμε ότι: $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$, άρα

$$x_1 + x_2 = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha^2)} \text{ και } x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{(1+\alpha^2)}.$$

Επομένως προκύπτει ότι:

$$x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 \le \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{1+a}{(1+a^2)} - \frac{1}{(1+a^2)} \le \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{1+a-1}{(1+a^2)} \le \frac{2}{5} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{(1+a^2)} \le \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5a \le 2(1+a^2) \Leftrightarrow 5a \le 2 + 2a^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 5a + 2 \ge 0$$

Λύνουμε την εξίσωση $2a^2 - 5a + 2 = 0$ και προκύπτει ότι:

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$$a_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ και } a_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ο πίνακας προσήμων της εξίσωσης είναι:

| | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $2a^2-5a+2$ | + | 0 | - | 0 + |

Άρα $a \le \frac{1}{2}$ ή $a \ge 2$

*(Μονάδες 5)*

*(ii)* Το τριώνυμο έχει δύο ετερόσημες ρίζες $x_1, x_2$ $(x_1 < x_2)$, άρα $x_1 < 0$ και $x_2 > 0$.

Αφού $(1 + \alpha^2) > 0$ για κάθε πραγματικό α, το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

| | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $(1+\alpha^2)x^2-(1+\alpha)x-1$ | + | 0 | - | 0 + |

- για x = -1 το αρχικό τριώνυμο γίνεται:
  $(1+a^2)(-1)^2-(1+a)(-1)-1=(1+a^2)+(1+a)-1=a^2+a+1>0$
  αφού $\Delta_\alpha = -3$ και $1 > 0$.
  Άρα $x_1 > -1$.
- για x = 2 το αρχικό τριώνυμο γίνεται:
  $(1+a^2)\cdot 2^2-(1+a)\cdot 2-1=4\cdot(1+a^2)-2\cdot(1+a)-1=4a^2-2a+1>0$
  αφού $\Delta_\alpha = -12$ και $4 > 0$.
  Άρα $x_2 < 2$.

*(Μονάδες 6)*

*(iii)* $|x_1+1|-|x_2-2|=-1$.

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε: $x_1 + 1 > 0$ και $x_2 - 2 < 0$. Οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$|x_1+1|-|x_2-2|=-1 \Leftrightarrow x_1+1+x_2-2=-1 \Leftrightarrow x_1+x_2=0$$

$$\frac{1+\alpha}{(1+\alpha^2)}=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$$

Για α = −1 το τριώνυμο γίνεται:

$$2x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

*(Μονάδες 6)*

***Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές :***

***Νίκου Δημήτρης***

***Παλτσόκας Παναγιώτης***

***Παπαθανασίου Νίκος***

***Χωνιανάκης Αντώνης***