ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ : ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

20/10/2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΣΥΝΟΛΑ – ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΔΙΑΤΑΞΗ – ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1) δ **2)** δ

3) α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό

4)

$$|\alpha * \beta| = |\alpha| * |\beta|$$
$$|\alpha * \beta|^2 = |\alpha|^2 * |\beta|^2$$
$$(\alpha * \beta)^2 = \alpha^2 * \beta^2$$

5) Σχολικό σελίδα 13.

ΘΕΜΑ 2ο

1) $4\alpha^2 + 4 \geq 8\alpha$
$4\alpha^2 - 8\alpha + 4 \geq 0$
$(2\alpha - 2)^2 \geq 0$
Ισχύει, επομένως ισχύει και η αρχική

$\beta^2 + 2\beta + 2 \geq 0$
$\beta^2 + 2\beta + 1 + 1 \geq 0$
$(\beta + 1)^2 + 1 \geq 0$
Ισχύει, επομένως ισχύει και η αρχική

2) Η ισότητα θα ισχύει για:
$2\alpha - 2 = 0$ και $(\beta + 1)^2 + 1 = 0$
$\alpha = 1$ Αδύνατο

3)

$$x > 3$$
$$x - 3 > 0$$
$$3 - x < 0$$

Επομένως στο 4ο βήμα, όταν απλοποιούνται τα (3-x), ουσιαστικά γίνεται μια διαίρεση με αρνητικό αριθμό, άρα η φορά της ανίσωσης θα πρέπει να αλλάξει.

ΘΕΜΑ 3ο

Α)

1)

$$4x^2 - 12x + y^2 - 6y + 18 \geq 0$$

Παρατηρώ ότι το $4x^2$ και y^2 θα μπορούσαν να είναι τα "$α^2$" της ταυτότητας $(α+β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$, ενώ τα 12x και 6y να είναι τα (2αβ)

$$(2x)^2 - 2 * 2x * 3 + y^2 - 2 * y * 3 + 18 \geq 0$$

Παρατηρώ ότι και στις 2 ταυτότητες που φαίνεται να δημιουργούνται, ο όρος "$β^2$" θα είναι το 3^2.

$$(2x)^2 - 2 * 2x * 3 + y^2 - 2 * y * 3 + 9 + 9 \geq 0$$
$$(2x)^2 - 2 * 2x * 3 + 9 + y^2 - 2 * y * 3 + 9 \geq 0$$
$$(2x - 3)^2 + (y - 3)^2 \geq 0$$

2) Η ισότητα ισχύει όταν (2x-3) = 0 και (y-3)=0
x = 3/2 y = 3

Β)

1)

$$A = \frac{x+y}{x^3} * \frac{x-(y:2)}{y^5} + 2 * \frac{x^2}{(xy)^4} * \frac{y^2}{(xy)^{-2}} - \frac{2*(x^3-1)}{(x+1)^2 - x}$$

$$= \frac{x+y}{x^3} * \frac{x-(y:2)}{y^5} + 2 * \frac{x^2 * y^2}{(xy)^{4-2}} - \frac{2*(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+2x+1-x}$$

$$= \frac{x+y}{x^3} * \frac{x-(y:2)}{y^5} + 2 * \frac{(xy)^2}{(xy)^2} - \frac{2*(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{x+y}{x^3} * \frac{x-(y:2)}{y^5} + 2 - \frac{2*(x-1)}{1}$$

$$= \frac{x+y}{x^3} * \frac{\frac{3}{2}-(3:2)}{y^5} + 2 - \frac{2*(\frac{3}{2}-1)}{1}$$

$$= \frac{x+y}{x^3} * \frac{0}{y^5} + 2 - 2 * \frac{1}{2}$$

$$= 0 + 2 - 1$$

$$= 1$$

2)

$$
\begin{aligned}
B &= 2 * A * x * y \\
&= 2 * 1 * \frac{3}{2} * 3 \\
&= 2 * \frac{9}{2} \\
&= 9
\end{aligned}
$$

ΘΕΜΑ 4ο

1)

$$\frac{\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3}{(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)^2} * \frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 - \beta^2} + \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}\right)^2 =$$
$$\frac{(\alpha + \beta)^3}{[(\alpha + \beta)^2]^2} * \frac{\alpha - \beta}{(\alpha - \beta) * (\alpha + \beta)} + \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}\right)^2 =$$
$$\frac{(\alpha + \beta)^3}{(\alpha + \beta)^4} * \frac{\alpha - \beta}{(\alpha - \beta) * (\alpha + \beta)} + \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}\right)^2 =$$
$$\frac{1}{\alpha + \beta} * \frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{(\alpha\beta)^2}{(\alpha + \beta)^2} =$$
$$\frac{1}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{(\alpha\beta)^2}{(\alpha + \beta)^2} =$$
$$\frac{1 + (\alpha\beta)^2}{(\alpha + \beta)^2}$$

Η ποσότητα αυτή είναι πάντοτε θετική, καθώς έχει θετικό αριθμητική και παρονομαστή, επομένως και η αρχική ποσότητα είναι θετική.

2) Μπορώ να προσθέσω και να πολλαπλασιάσω ανισότητες κατά μέλη, άρα:

$2+3 < x+y < 4+5$
$5 < x+y < 9$

$2 < x < 4$ και $3 < y < 5$
$2*2 < 2x < 2*4$ και $3*3 < 3y < 3*5$
$4 < 2x < 8$ και $9 < 3y < 15$
$4 < 2x < 8$ και $-9 > -3y > -15$
$4 < 2x < 8$ και $-15 < -3y < -9$
άρα
$4 + (-15) < 2x + (-3y) < 8 + (-9)$
$-11 < 2x - 3y < -1$

$$3 < y < 5$$
$$3^2 < y^2 < 5^2$$
$$9 < y^2 < 25$$
$$\frac{1}{9} > \frac{1}{y^2} > \frac{1}{25}$$
$$\frac{1}{25} < \frac{1}{y^2} < \frac{1}{9}$$
$$2 * \frac{1}{25} < x * \frac{1}{y^2} < 4 * \frac{1}{9}$$
$$\frac{2}{25} < \frac{x}{y^2} < \frac{4}{9}$$

$$2 < x < 4 \quad \text{και} \quad 3 < y < 5$$
$$2^3 < x^3 < 4^3 \quad \text{και} \quad 3^3 < y^3 < 5^3$$
$$8 < x^3 < 64 \quad \text{και} \quad 27 < y^3 < 125$$
άρα
$$8+27 < x^3 + y^3 < 64+125$$
$$35 < x^3 + y^3 < 189$$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ:

Τζιώρτζης Γιάννης
Τζιώρτζης Μιχάλης