ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
3 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 74.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 41.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 43.

Α4. **1.** Λάθος **2.** Σωστό **3.** Σωστό **4.** Σωστό **5.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $\zeta_1 // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\zeta_1} = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\zeta_1} = -7$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας ζ_1 είναι:

$$(\zeta_1): y-4=-7(x-2) \Leftrightarrow y-4=-7x+14 \Leftrightarrow y=-7x+18$$

Για x=0 προκύπτει $y=-7\cdot 0+18$, άρα Κ(0, 18) το σημείο τομής με $y'y$.

Β2. Είναι $\lambda_{\zeta_2} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-4}{-5-2} = \dfrac{1}{7}$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας ζ_2 είναι:

$$(\zeta_2): y-4=\frac{1}{7}(x-2) \Leftrightarrow y-4=\frac{1}{7}x-\frac{2}{7} \Leftrightarrow y=\frac{1}{7}x+\frac{26}{7}$$

Επειδή $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\zeta_2} = -7\cdot\dfrac{1}{7} = -1$ οι ευθείες ε και ζ_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

Β3. Είναι $\lambda_{\zeta_3} = \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4} = 1$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας ζ_3 είναι:

$$(\zeta_3): y-3=x-(-5) \Leftrightarrow y=x+8$$

Για y=0 προκύπτει $0=x+8 \Leftrightarrow x=-8$, άρα Λ(-8, 0) το σημείο τομής με $x'x$.

Β4. Είναι $\overrightarrow{\Gamma A} = (2+5, 4-x) = (7, 4-x)$ και $\overrightarrow{\Gamma B} = (-5+5, 3-x) = (0, 3-x)$.

$$\overrightarrow{\Gamma A} \perp \overrightarrow{\Gamma B} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B} = 0 \Leftrightarrow 7\cdot 0 + (4-x)(3-x) = 0 \Leftrightarrow 4-x=0 \text{ ή } 3-x=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=3$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. ΄Εχουμε ότι: $\begin{cases} f_{max}=5 \\ f_{min}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+|\beta|=5 \\ \alpha-|\beta|=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\beta|-1+|\beta|=5 \\ \alpha=|\beta|-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|\beta|=6 \\ \alpha=|\beta|-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\beta|=3 \\ \alpha=2 \end{cases} \overset{\beta<0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \beta=-3 \\ \alpha=2 \end{cases}$

Συνεπώς είναι $f(x)=2-3\etaμ\frac{x}{2}$.

Γ2. Είναι: $εφ(3π+θ)=εφ(2π+π+θ)=εφ(π+θ)=εφθ$, $ημ\left(\frac{π}{2}+θ\right)=συνθ$, $ημ(π-θ)=ημθ$,

$σφ\left(\frac{π}{2}-θ\right)=εφθ$, $συν(θ-4π)=συνθ$ και $συν\left(\frac{3π}{2}-θ\right)=-ημθ$.

Επίσης $f(π)=2-3ημ\frac{π}{2}=2-3=-1$. Οπότε

$$\frac{εφ(3π+θ)\cdot ημ\left(\frac{π}{2}+θ\right)\cdot ημ(π-θ)}{σφ\left(\frac{π}{2}-θ\right)\cdot συν(θ-4π)\cdot συν\left(\frac{3π}{2}-θ\right)}=\frac{εφθ\cdot συνθ\cdot ημθ}{εφθ\cdot συνθ\cdot(-ημθ)}=-1=f(π)$$

Γ3. $f(x)=-1 \Leftrightarrow 2-3ημ\frac{x}{2}=-1 \Leftrightarrow -3ημ\frac{x}{2}=-3 \Leftrightarrow ημ\frac{x}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=2kπ+\frac{π}{2} \Leftrightarrow x=4kπ+π$, $k\in Z$

Ισχύει ότι: $2π<4kπ+π<6π \Leftrightarrow π<4kπ<5π \Leftrightarrow 1<4k<5 \Leftrightarrow \frac{1}{4}<k<\frac{5}{4}$, οπότε $k=1$ και $x=5π$.

Γ4. Είναι $f(2π)=2-3ημ\frac{2π}{2}=2-3\cdot 0=2=εφθ$.

$συν^2θ=\frac{1}{1+εφ^2θ}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$ οπότε $συνθ=-\sqrt{\frac{1}{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ αφού $συνθ<0$ όταν $\frac{π}{2}<θ<π$

$ημ^2θ+συν^2θ=1 \Leftrightarrow ημ^2θ=1-συν^2θ \Leftrightarrow ημ^2θ=1-\frac{1}{5} \Leftrightarrow ημ^2θ=\frac{4}{5} \Leftrightarrow ημθ=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ αφού

$ημθ>0$ όταν $\frac{π}{2}<θ<π$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\vec{α}\cdot\vec{β}=|\vec{α}|\cdot|\vec{β}|\cdot συν120^o=2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$. Οπότε

$$|\vec{γ}|^2=\left|\frac{1}{2}\vec{α}+\frac{1}{2}\vec{β}\right|^2=\left(\frac{1}{2}\vec{α}+\frac{1}{2}\vec{β}\right)^2=\frac{1}{4}|\vec{α}|^2+\frac{1}{2}\vec{α}\cdot\vec{β}+\frac{1}{4}|\vec{β}|^2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$, άρα $|\vec{γ}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Επίσης $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\left(\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}\right)=\frac{1}{2}\vec{\alpha}\vec{\beta}+\frac{1}{2}\left|\vec{\beta}\right|^2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$ άρα $\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}$.

Δ2. $\vec{\alpha}\perp\left(\vec{x}-3\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\vec{\alpha}\left(\vec{x}-3\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\left(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}-3\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2+\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\vec{\beta}=0\Leftrightarrow-2-\lambda+3=0\Leftrightarrow\lambda=1$

Δ3. Είναι $\vec{x}\cdot\vec{\alpha}=\left(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\vec{\alpha}=-\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2+\vec{\alpha}\vec{\beta}=-2-1=-3$ και

$|\vec{x}|^2=\left(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\frac{1}{4}|\vec{\alpha}|^2-\vec{\alpha}\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2=1+1+1=3$ άρα $|\vec{x}|=\sqrt{3}$

Συνεπώς $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{x},\vec{\alpha}}\right)=\frac{\vec{x}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{\alpha}|}=\frac{-3}{\sqrt{3}\cdot 2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $\left(\widehat{\vec{x},\vec{\alpha}}\right)=\frac{5\pi}{6}$

Δ4. Έστω $\vec{v}=(x,y)$. Τότε $\lambda_{\vec{v}}=\varepsilon\varphi 120^{o}\Leftrightarrow\frac{y}{x}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow y=-\sqrt{3}x$

Επίσης $|\vec{v}|=3|\vec{x}|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow x^2+y^2=27$. Οπότε λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ x^2+y^2=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ x^2+3x^2=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ x^2=\frac{27}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\begin{pmatrix} y=-\frac{9}{2} \\ x=\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} y=\frac{9}{2} \\ x=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\right.$$

ΚΑΛΗ ΧΡΟΝΙΑ!

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:
Καψαλιάρης Στέλιος
Κοντογιάννης Στέργιος
Τζιώρτζης Μιχάλης
Χωνιανάκης Αντώνης