Απαντήσεις Διαγωνίσματος Μαθηματικών Β' Λυκείου

8 Μαρτίου 2020

Θέμα Α

Α1. Σχ βιβλίο σελ. 135

Α2.

i – Λ ii – Λ iii – Λ iv – Σ v – Λ vi – Λ vii – Σ viii – Σ ix – Σ x – Σ

Θέμα Β

Β1.

i. Για να είναι ίσα τα πολυώνυμα $P(x)=\alpha x^2+2x+\alpha^2-5$ και $Q(x)=x^2+\left(\beta^2+1\right)x-4\beta$ πρέπει:

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta^2+1=2\\ \alpha^2-5=-4\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta^2=1\\ 1-5=-4\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=\pm1\\ \beta=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\end{cases}$$

ii. Για να είναι το $P(x)+Q(x)$ το μηδενικό πολυώνυμο πρέπει:

$$P(x)+Q(x)=0\Leftrightarrow \alpha x^2+2x+\alpha^2-5+x^2+\left(\beta^2+1\right)x-4\beta=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\alpha+1)x^2+\left(\beta^2+3\right)x+\left(\alpha^2-5-4\beta\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha+1=0\\ \beta^2+3=0\\ \alpha^2-5-4\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta^2=-3\ ,\ \ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta\\ \alpha^2-5-4\beta=0\end{cases}$$

Άρα δεν υπάρχουν τιμές των α,β για τις οποίες το άθροισμα $P(x)+Q(x)$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο

iii. Για α=1 , $P(x)=x^2+2x-4$

$$P(x)+x^4+3x^3+2=5x\Leftrightarrow x^2+2x-4+x^4+3x^3+2=5x\Leftrightarrow x^4+3x^3+x^2-3x-2=0$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες του 2: $\pm1,\pm2$

Σχήμα Horner για ρ=1

1	3	1	-3	-2	1
	1	4	5	2	
1	4	5	2	0	

Άρα $(x-1)(x^3+4x^2+5x+2)=0 \Leftrightarrow x=1 \quad ή \quad x^3+4x^2+5x+2=0$

Για το $x^3+4x^2+5x+2=0$ έχουμε

Πιθανές ακέραιες ρίζες του 2: $\pm 1, \pm 2$

Σχήμα Horner για $\rho=-1$

1	4	5	2	-1
	-1	-3	-2	
1	3	2	0	

Άρα $(x+1)(x^2+3x+2)=0 \Leftrightarrow x=-1 \quad ή \quad x^2+3x+2=0$

$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \quad ή \quad x=-2$

Άρα ρίζες τις εξίσωσης: $x=1, x=-1, x=-2$

Β2.

i. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}=1$

Πρέπει: $\left(2x+1\geq 0 \ \ και \ \ x\geq 0\right) \Leftrightarrow \left(x\geq -\frac{1}{2} \ \ και \ \ x\geq 0\right) \Leftrightarrow x\geq 0$

$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(1+\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow 2x+1=1+2\sqrt{x}+x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2\sqrt{x} \overset{x\geq 0}{\Longleftrightarrow} x^2=4x \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow \left(x=0 \ \ ή \ \ x=4\right)$

Δεκτές και οι δύο ρίζες.

Θέμα Γ

Γ1

i. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x’x στο σημείο με τετμημένη -1, άρα:

$f(-1)=0 \Leftrightarrow -3+a+13+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-10 \Leftrightarrow \beta=-\alpha-10 \quad (1)$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(2,24)$ άρα:

$f(2)=24 \Leftrightarrow 24+4a-26+\beta=-24 \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=-22 \quad (2)$

$(2) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} 4\alpha-\alpha-10=-22 \Leftrightarrow 3\alpha=-12 \Leftrightarrow \alpha=-4$

$\beta=-\alpha-10 \Leftrightarrow \beta=4-10 \Leftrightarrow \beta=-6$

ii. Για $\alpha=-4$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta=-6$ η f γίνεται $f(x)=3x^3-4x^2-13x-6$

α) Για τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x'x έχουμε: $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^3-4x^2-13x-6=0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες του -6: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

Σχήμα Horner με το ρ=-1

3	-4	-13	-6	-1
	-3	7	6	
3	-7	-6	0	

Άρα

$(x+1)(3x^2-7x-6)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ $\acute{\eta}$ $3x^2-7x-6=0 \Leftrightarrow x=-1$ $\acute{\eta}$ $3x^2-7x-6=0$

$3x^2-7x-6=0$,Δ=121 , $x=3$ $\acute{\eta}$ $x=-\frac{2}{3}$

Άρα σημεία τομής: $\mathrm{B}(-1,0),\Gamma(3,0),\Delta\left(-\frac{2}{3},0\right)$

β) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x:
$f(x)<0 \Leftrightarrow (x+1)(3x^2-7x-6)<0$

x	$-\infty$ -1 $-\frac{2}{3}$ 3 $+\infty$			
x+1	-	+	+	+
$3x^2-7x-6$	+	+	-	+
f(x)	-	+	-	+

Άρα $x\in(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{2}{3},3\right)$

Γ2.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι -4, οπότε $P(-1)=-4$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x-2 είναι -1, οπότε $P(2)=-1$

Επειδή το $(x+1)(x-2)$ είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $(x+1)(x-2)$ θα είναι το πολύ 1ου βαθμού. Άρα:

$P(x)=(x+1)(x-2)\pi(x)+\upsilon(x) \Leftrightarrow P(x)=(x+1)(x-2)\pi(x)+ax+\beta$.

Έχουμε:

$P(-1)=-4 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=-4$

$P(2)=-1 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-1 \Leftrightarrow -2\alpha-\beta=1$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $-3\alpha=-3 \Leftrightarrow \alpha=1$

$-\alpha+\beta=-4 \Leftrightarrow -1+\beta=-4 \Leftrightarrow \beta=-3$

Άρα $\upsilon(x)=x-3$

Θέμα Δ

i. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,-2)$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(2,-4)$

$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=8+4=12\neq 0$, άρα τα σημεία Α,Β,Γ ορίζουν τρίγωνο.

ii. $\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}=\dfrac{-2-2}{3-1}=-2$

$\mathrm{B\Delta}\perp \mathrm{A\Gamma} \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{B\Delta}}\cdot\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{B\Delta}}=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{B\Delta}: \mathrm{y}-0=\dfrac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow 2y=x+1 \Leftrightarrow x-2y+1=0$

$\lambda_{\mathrm{AB}}=\dfrac{-2}{-2}=1$

$\mathrm{\Gamma E}\perp \mathrm{AB} \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{\Gamma E}}\cdot\lambda_{\mathrm{AB}}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{\Gamma E}}=-1$

$\mathrm{\Gamma E}: \mathrm{y}+2=-1(x-3) \Leftrightarrow y+2=-x+3 \Leftrightarrow x+y-1=0$

iii. Το ορθόκεντρο Η είναι το σημείο τομής των ευθείων ΒΔ και ΓΕ.

$$\begin{cases}x-2y+1=0\\ x+y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2y+1=0\\ -x-y+1=0\end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $-3y+2=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{2}{3}$.

$x+y-1=0 \Leftrightarrow x+\dfrac{2}{3}-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

Άρα $\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

$\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}=-2$, $\mathrm{A\Gamma}: y-2=-2(x-1) \Leftrightarrow y-2=-2x+2 \Leftrightarrow 2x+y-4=0$

$$d\left(\mathrm{H},\mathrm{A\Gamma}\right)=\frac{\left|2\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}-4\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{\left|-\frac{8}{3}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{5}}=\frac{8}{3\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{15}$$

iv. Έστω Μ(x,y) σημείο της ΕΓ

ΕΓ: $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=-x+1$

Άρα $\mathrm{M(x,y)} \Leftrightarrow \mathrm{M(x,-x+1)}$

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=(x-1,-x+1-2) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}=(x-1,-x-1)$

$$(\mathrm{A\Gamma M})=\frac{\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}},\overrightarrow{\mathrm{AM}})\right|}{2}=\frac{\left\|\begin{matrix}2 & -4\\ x-1 & -x-1\end{matrix}\right\|}{2}=\frac{|-2x-2+4x-4|}{2}=\frac{|2x-6|}{2}=\frac{2|x-3|}{2}=|x-3|$$

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}})\right|}{2}=\frac{12}{2}=6$$

$$(\mathrm{A\Gamma M})=(\mathrm{AB\Gamma})\Leftrightarrow|x-3|=6\Leftrightarrow\left(x-3=6 \;\; ή \;\; x-3=-6\right)\Leftrightarrow\left(x=9 \;\; ή \;\; x=-3\right)$$

Για $x=9$, $\mathrm{M}(9,-8)$

Για $x=-3$, $\mathrm{M}(-3,4)$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:

Καψαλιάρης Στέλιος

Κοντογιάννης Στέργιος

Τζιώρτζης Μιχάλης

Χωνιανάκης Αντώνης