ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

20-3-2016

ΛΥΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1^{ο}

Α) Σχολικό βιβλίο, σελ. 16

Β) Σχολικό βιβλίο, σελ. 151

Γ) Λ, Σ, Λ, Σ, Σ

ΖΗΤΗΜΑ 2^{ο}

i) πρέπει x>0, άρα $A_f = (0,+\infty)$

ii) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x}$

Αφού x>0, άρα 2x>0

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		‖	+	0	-	
$f(x)$		‖	↗		↘	

$f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$

2-x>0   2-x<0

X<2   x>2

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 2$

iii) για τιμές μεγαλύτερες του 2 η f είναι γνήσια φθίνουσα

Άρα, αφού $2<3<4<5<8 \Rightarrow f(2)>f(3)>f(4)>f(5)>f(8)$

α) $R=f(2)-f(8)=\ln 2-1+\lambda^2-6\lambda+6-(\ln 8-4+\lambda^2-6\lambda+6)$

$$=\ln 2-1+\lambda^2-6\lambda+6-\ln 8+4-\lambda^2+6\lambda-6$$

$$=\ln 2-\ln 8+3=\ln 2-\ln 2^3+3=$$

$$=\ln 2-3\ln 2+3=-2\ln 2+3=$$

$$=\ln 2^{-2}+3=\ln\frac{1}{4}+3=\ln 1-\ln 4+3=3-\ln 4$$

$$\delta=f(4)=\ln 4-2+\lambda^2-6\lambda+6=\ln 4+\lambda^2-6\lambda+4$$

β) $R+\delta<2 \Leftrightarrow 3-\ln 4+\ln 4+\lambda^2-6\lambda+4<+2 \Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda+5<0$

Άρα $\lambda \in (1,5)$ και αφού $\lambda \in \Omega$, άρα λ=2,3,4

Επομένως $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{3}{10}$

<u>ΖΗΤΗΜΑ 3ο</u>

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+\left(\frac{13-2a^2}{2}\right)x^2+6x+2016$$

i) $f'(x)=x^2+(13-2a^2)x+6$

Ακρότατο στο $x_1=2$ σημαίνει

$f'(2)=0 \Leftrightarrow 4+(13-2a^2)2+6=0 \Leftrightarrow 4+26-4a^2+6=0 \Leftrightarrow 4a^2=36 \Leftrightarrow a^2=9$

α=-3 ή α=3

ii) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 2016$

$f'(x) = x^2 - 5x + 6$

$f'(x) = 0$

άρα x=2 ή x=3

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

άρα f↑ όταν $x \in (-\infty,2) \cup (3,+\infty)$

f↓ όταν $x \in (2,3)$

τοπικό μέγιστο στο x=2 και fmax=f(2)

τοπικό ελάχιστο στο x=3 και fmin=f(3)

iii) το α θα έπαιρνε τις τιμές {1,2,3,4,5,6}

Βρήκαμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_1 = 2$, όταν α=-3 ή α=3. Το -3 απορρίπτεται.

Άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{6}$

iv) η μεγαλύτερη τιμή του α είναι 3, άρα $v_2 = 3$

x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	7	7	0,14	0,14	14	14
2	3	10	0,06	0,20	6	20
3	17	27	0,34	0,54	34	54
4	18	45	0,36	0,90	36	90
5	5	50	0,10	1	10	100
Σύνολα	50		1		100	

$f_3\% = 34$, άρα $f_3 = 0,34$

$F_{ολ} = 100$, άρα $f_5\% = 10\%$, άρα $f_5 = 0,10$

$F_5 = 1$, $\Sigma f_i\% = 100$, $\Sigma f_i = 1$

$v_1 = N_1$

$N_1 + v_2 = N_2 \Leftrightarrow N_1 + 3 = 10 \Leftrightarrow N_1 = 7 = v_1$

$f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v = \frac{v_2}{f_2} = \frac{3}{0,06} = 50$

$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{7}{50} = F_1$, άρα $f_1\% = 14 = F_i\%$

$F_2 = f_1 + f_2 = 0,20$, άρα $f_2\% = 6$ και $F_2\% = 20$

$f_3 = \frac{v_3}{v} \Rightarrow v_3 = v \cdot f_3 = 50 \cdot 0,34 = 17$, $N_3 = 17 + 10 = 27$

$F_3 = F_2 + f_3 = 0,54$, $F_3\% = 54\%$

$F_4\% = F_3\% + f_4\% \Rightarrow f_4\% = 36$, $f_4 = 0,36$, $F_4 = 0,90$

$f_4 = \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow v_4 = v \cdot f_4 = 50 \cdot 0,36 = 18$, $N_4 = 27 + 18 = 45$

$v_5 = N = N_4 = 50 - 45 = 5$, $N_5 = v = 50$, $F_5 = F_4 + f_5 = 1$

<u>ΖΗΤΗΜΑ 4ο</u>

Α) i) Έστω Α,Β ασυμβίβαστα, δηλ. $A \cap B = \varnothing$

Τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 1$ άτοπο

Άρα $A \cap B \neq 0$

ii) ισχύει $A \cap B \subseteq A$ Άρα $P(A \cap B) \leq P(A)$ $P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$

ισχύει $A \cup B \subseteq \Omega$ Άρα $P(A \cup B) \leq P(\Omega)$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1 \leq P(A \cap B)$

$\frac{1}{6} \leq P(A \cap B)$

iii) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{2}-P(A-B)$

Αλλά $P(A\cap B)\geq\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{2}-P(A-B)\geq\frac{1}{6}\Leftrightarrow P(A-B)\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\Leftrightarrow P(A-B)\leq\frac{1}{3}$

Άρα $P(A-B)_{max}=\frac{1}{3}$

iv) $P(\Gamma)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)\qquad(1)$

$P(A-B)=\frac{1}{6}\Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

και $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(B-A)=\frac{1}{3}$

Άρα $(1)\Rightarrow P(\Gamma)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

και $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

B) $P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{2}{3},P(\Gamma)=\frac{1}{2},P(A\cap B)=\frac{1}{3},P(A\cup B)=\frac{5}{6}$

$P(\Omega)=1,\quad P(\varnothing)=0$

i) $\bar{x}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+1+0}{7}=\dfrac{\frac{23}{6}}{7}=\frac{23}{42}$

ii) $0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{6},1$

ν=7, περιττό πλήθος, άρα $\delta=4^{\eta}=\frac{1}{2}$

R=1-0=1

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΛΗΘΗΚΕ Ο ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΝΙΚΟΥ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ